E.N.S.I. CHIMIE NORD & SUD 1982

Programme TB **ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES** (4 h)

PREMIER PROBLÈME

1° On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_0) : x(x-1)(x-2)y' + (2x^2 - 5x + 4)y = 0$$
$$(E) : x(x-1)(x-2)y' + (2x^2 - 5x + 4)y = 1$$

a. Intégrer (E_0) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$, $]1, 2[$ et $]2, +\infty[$.

b. Intégrer (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$, $]1, 2[$ et $]2, +\infty[$.

2° On considère la fonction φ_λ définie par :

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{\lambda(x-1) - 1}{x^2(x-2)} + \frac{(x-1)\,\mathrm{Log}\,(1-x)}{x^2(x-2)}$$

λ désignant une constante réelle.

a. Préciser l'ensemble de définition de la fonction φ_λ.

b. Étudier, suivant les valeurs de la constante réelle λ, la limite éventuelle de la fonction φ_λ quand $x \to 0$.

c. Montrer qu'il existe une valeur λ_1 réelle et une fonction f continue sur $]-\infty, +1[$ telle que l'on ait :

$$f(x) = \varphi_{\lambda_1}(x) \quad \text{sur} \quad]-\infty, 0[\cup]0, 1[$$

Préciser $f(0)$.

d. Étudier la dérivabilité de f au point 0.
Si f est dérivable au point 0, préciser $f'(0)$.

3° On considère la fonction ψ_λ définie sur $]0, 1[\cup]1, 2[$ par :

$$\psi_\lambda(x) = \frac{\lambda(x-1) - 1}{x^2(x-2)} + \frac{(x-1)\,\mathrm{Log}\,|x-1|}{x^2(x-2)}$$

λ désignant une constante réelle.

a. Montrer qu'il existe une fonction g_λ continue sur $]0, 2[$ telle que l'on ait :
$g_\lambda(x) = \psi_\lambda(x)$ sur $]0, 1[\cup]1, 2[$.
Préciser $g_\lambda(1)$.

b. Étudier la dérivabilité de g_λ au point 1.
Si g_λ est dérivable au point 1, préciser $g'_\lambda(1)$.

4° On considère la fonction θ_λ définie par :

$$\theta_\lambda(x) = \frac{\lambda(x-1) - 1}{x^2(x-2)} + \frac{(x-1)\,\mathrm{Log}\,(x-1)}{x^2(x-2)}$$

λ désignant une constante réelle.

a. Préciser l'ensemble de définition de la fonction θ_λ.

b. Étudier, suivant les valeurs de la constante réelle λ, la limite éventuelle de la fonction θ_λ quand $x \to 2$.

c. Montrer qu'il existe une valeur λ_2 réelle et une fonction h continue sur $]1, +\infty[$ telle que l'on ait :

$$h(x) = \theta_{\lambda_2}(x) \quad \text{sur} \quad]1, 2[\cup]2, +\infty[$$

Préciser $h(2)$.

.../...

d. Étudier la dérivabilité de h au point 2.

Si h est dérivable au point 2 préciser $h'(2)$.

5° *a.* Déterminer une fonction υ, continue sur $]-\infty, 2[$, telle que υ soit solution de l'équation différentielle (E) sur chacun des intervalles

$$]-\infty, 0[\ , \quad]0, 1[\quad \text{et} \quad]1, 2[$$

υ est-elle solution de (E) sur $]-\infty, 1[$? sur $]-\infty, 2[$?

b. Déterminer une fonction V, continue sur $]0, +\infty[$, telle que V soit solution de l'équation différentielle (E) sur chacun des intervalles

$$]0, 1[\ , \quad]1, 2[\quad \text{et} \quad]2, +\infty[$$

V est-elle solution de (E) sur $]0, +\infty[$? sur $]1, +\infty[$?

c. Peut-on déterminer une fonction W, continue sur R, telle que W soit solution de (E) sur chacun des intervalles

$$]-\infty, 0[\ , \quad]0, 1[\ , \quad]1, 2[\quad \text{et} \quad]2, +\infty[\ ?$$

DEUXIÈME PROBLÈME

On considère dans un plan affine un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $(\vec{i}, \vec{j}) = \theta$, θ étant un réel donné. On note Ox et Oy les axes déterminés respectivement par $(O, \vec{i})$ et par $(O, \vec{j})$. On considère le point R de coordonnées (p, q) dans ce repère, p et q étant tels que $p \neq 0$ et $q \neq 0$.

1° *a.* Quelle condition doit vérifier θ pour que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ forme un repère?

b. Déterminer un point P sur Ox et un point Q sur Oy tels que OPRQ soit un parallélogramme.

c. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (PQ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° On considère la droite (D) passant par O et orthogonale à (PQ). Soit H l'intersection des droites (D) et (PQ).

a. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On rappelle que ce repère n'est pas orthonormé en général).

b. Démontrer que : $\forall (p, q) \neq (0, 0), \quad \forall \theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad p^2 + q^2 - 2pq\cos\theta > 0$.

c. Déterminer les coordonnées du point H dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

d. Déterminer la distance du point O à la droite (PQ).

3° On considère la droite (Δ) passant par R et parallèle à (PQ). Soit S le point d'intersection des droites (D) et (Δ).

a. Montrer que H est le milieu de OS.

b. En déduire les coordonnées de S.

4° On considère le cercle (Γ) de centre P et passant par R.

a. Déterminer l'équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b. Soit (D') la parallèle à (D) passant par R.

Déterminer les coordonnées, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, des points d'intersection de la droite (D') et du cercle (Γ).

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail